UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Informatica teorica - 26 giugno 2007

Cognome______________________________Nome_______________________Matricola__________

Solo seconda parte ☐ Prima e seconda parte ☐

Prima parte

1. L'insieme delle stringhe palindrome (es.: osso, babbab, xyzyx) è decidibile? Se sì, fornire l'algoritmo di decisione descritto mediante un diagramma di flusso o un linguaggio di programmazione o dello pseudo-codice; altrimenti fornire un'adeguata giustificazione.

2. Siano A un insieme decidibile e B un insieme semidecidibile. Dimostrare o confutare in maniera adeguata le seguenti affermazioni:

- 2a) $A \cap B$ è sicuramente semidecidibile
- 2b) $A \cap B$ può non essere decidibile
- 2c) $A \cup B$ non può essere decidibile
- 2d) $A \cup B$ è sicuramente semidecidibile
- 2e) $A – B$ può essere decidibile
- 2f) $A – B$ è sicuramente semidecidibile
- 2g) $B – A$ non può essere decidibile
- 2h) $B – A$ può non essere nemmeno semidecidibile

3. Che cardinalità hanno i seguenti insiemi? Motivare in maniera adeguata la risposta.

- 3a) L'insieme delle stringhe lunghe 500 bit
- 3b) L'insieme delle stringhe costituite da 500 bit (0,1) seguiti da una sequenza infinita di '1'
- 3c) L'insieme delle stringhe infinite contenenti esattamente 500 '1' in qualunque posizione e con gli altri bit posti a '0'
- 3d) L'insieme delle stringhe infinite contenenti un solo '1' nei primi 500 bit, un solo uno nei successivi 500 bit, e poi solo '0'.

4. Il connettivo logico condizionale $\Rightarrow$ è tale che, dati due predicati P(x) e Q(x), $P(x) \Rightarrow Q(x)$ risulta falso solo nel caso in cui P(x) è vero e Q(x) è falso, ed è vero in tutti gli altri casi. Scrivere la funzione caratteristica di $P \Rightarrow Q$ basandosi sulle funzioni caratteristiche di P e di Q, e dire se, nel caso in cui P e Q sono decidibili, anche $P \Rightarrow Q$ lo è.

Seconda parte

1. Scrivere la tavola della macchina di Turing che computa la seguente funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} y-x & se\ x\le y \\ \perp & altrimenti \end{cases}$$

2. Dimostrare senza ricorrere al Teorema di Rice che l'insieme $\{x \in N$: φ_x è totale$\}$, dove $\{\varphi_x\}$ è l'enumerazione delle funzioni ricorsive generali, non è un insieme decidibile.

3. La funzione $\min(x,y)=\begin{cases} x & se\ x<y \\ y & altrimenti \end{cases}$ è in RP?

4. Paolo è confuso di fronte a un problema. Paolo sa che un numero si dice perfetto quando è pari alla somma di tutti i suoi fattori (se stesso escluso). Ad esempio, 28 è perfetto, in quanto 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Egli sa anche che i matematici non sono ancora riusciti a dimostrare se esiste un numero perfetto dispari o meno. Paolo ha i seguenti dubbi. Aiutatelo a liberarsene fornendo spiegazioni convincenti.

- 4a) Visto che i matematici non sono riusciti a dimostrare nulla sull'esistenza di un numero perfetto dispari, vuol dire che l'insieme dei numeri perfetti dispari è indecidibile?
- 4b) Dato che la definizione di numero perfetto è piuttosto semplice, magari c'è un algoritmo che esamina tutti i numeri dispari e controlla se ce n'è almeno uno perfetto?
- 4c) Ma allora il problema "x è un numero dispari perfetto?" e il problema dell'esistenza di un numero dispari perfetto sono sostanzialmente la stessa cosa?
- 4d) Supponiamo che ci sia davvero un algoritmo che esamini i dispari e restituisce il primo dispari perfetto. Con questo gli informatici non potrebbero fornire una risposta istantanea ai matematici?
- 4e) Se il primo Teorema di Church, quello sull'arresto di una Macchina di Turing, non valesse, cambierebbe qualcosa?