UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Informatica teorica - 15 gennaio 2008 SOLUZIONI

Cognome________________________________Nome________________________Matricola__________

Solo seconda parte ☐ Prima e seconda parte ☐

Prima parte

Sia *div* una funzione che, dato un naturale, restituisce l'insieme di tutti e soli i suoi divisori. Rispondere, con motivazioni adeguate, alle seguenti domande.

a) Qual è il dominio di *div*? *N*

b) Qual è il codominio di *div*? *P(N)*

c) *div* è suriettiva? No, l'insieme vuoto ∅ appartiene a *P(N)* ma non esiste n tale che *div*(n) = ∅

d) *div* è iniettiva? Sì, se x e y sono diversi i loro divisori costituiscono divisori diversi.

e) *div* è totale? Sì, per ogni n esiste sempre un insieme dei suoi divisori.

f) *div* è invertibile? (se sì, descrivere la funzione inversa)
No, perché non è suriettiva.

g) *div* è computabile? (se sì, descrivere l'algoritmo)
Dato n, *div*(n) è costituito da tutti gli x che, a partire da 1 fino a n compreso, dividono n senza resto. E' facile implementare un algoritmo con un ciclo for e un array di dimensioni adeguate (o una lista dinamica) per contenere gli elementi di *div*(n).

h) Il rango di *div* è decidibile? (se sì, descrivere l'algoritmo)
Dato un sottoinsieme di *N*, possiamo stabilire se esso è un elemento del rango di div semplicemente cercando in tale sottoinsieme l'elemento massimo, che chiamiamo max. Calcolando con l'algoritmo precedente *div*(max), basta controllare se l'insieme sotto esame è uguale a *div*(max) elemento per elemento. Se la risposta è sì, esso appartiene al rango di *div*, altrimenti no.

i) Che cardinalità ha il rango di *div*?
$\aleph_0$, dal momento che ogni sottoinsieme è in corrispondenza biunivoca con il suo massimo elemento, ossia per ogni n esiste uno e un solo *div*(n).

j) Che cardinalità ha R0 = {n∈ N: Card(*div*(n)) = 0}?
R0 è l'insieme dei naturali che non hanno divisori. R0 è vuoto, quindi la sua cardinalità è zero.

k) Che cardinalità ha R1 = {n∈ N: Card(*div*(n)) = 1}?
R1 è l'insieme dei naturali che hanno un solo divisore. L'unico naturale che ha questa caratteristica è 1. Quindi la cardinalità di R1 = {1} è 1.

l) Che cardinalità ha R2 = {n∈ N: Card(*div*(n)) = 2}?

m) Che cardinalità ha PR = {n∈ N: n è primo}?
R2 coincide con l'insieme dei numeri primi, perché i numeri primi sono i soli che sono divisibili solo per se stessi e per 1, ossia tali che l'insieme dei loro divisori ha cardinalità 2. R2 e PR hanno quindi la stessa cardinalità, ossia $\aleph_0$.

n) Che cardinalità ha R2 - PR?
Se togliamo da R2 tutti gli elementi appartenenti a PR non rimane nulla. R2 – PR è quindi l'insieme vuoto, la cui cardinalità è zero.

Seconda parte

1. Scrivere la tavola di una macchina di Turing con alfabero Σ = {s_0, 0,1} che, data in ingresso una coppia (x,y) di stringhe di 2 bit ciascuna, restituisce 0 se le due stringhe sono uguali, 1 altrimenti.

q_i: stato iniziale
q_f: stato finale
$q_{b???}$: è stato letto il bit b nella posizione 1 della prima stringa
$q_{bd??}$: la prima stringa è stata letta ed è costituita dai bit b e d
q_{no}: le due stringhe non coincidono
$q_{b->ok}$: se l'ultimo bit è b, le due stringhe coincidono

q_i 0 s_0 D $q_{0???}$
q_i 1 s_0 D $q_{1???}$
$q_{0???}$ 0 s_0 D $q_{00??}$
$q_{1???}$ 0 s_0 D $q_{10??}$
$q_{0???}$ 1 s_0 D $q_{01??}$
$q_{1???}$ 1 s_0 D $q_{11??}$
$q_{00??}$ s_0 s_0 D $q_{00??}$
$q_{01??}$ s_0 s_0 D $q_{01??}$
$q_{10??}$ s_0 s_0 D $q_{10??}$
$q_{11??}$ s_0 s_0 D $q_{11??}$
$q_{00??}$ 0 s_0 D $q_{0->ok}$
$q_{00??}$ 1 s_0 D q_{no}
$q_{01??}$ 0 s_0 D $q_{1->ok}$
$q_{01??}$ 1 s_0 D q_{no}
$q_{10??}$ 0 s_0 D q_{no}
$q_{10??}$ 1 s_0 D $q_{0->ok}$
$q_{11??}$ 0 s_0 D q_{no}
$q_{11??}$ 1 s_0 D $q_{1->ok}$
q_{no} 0 1 C q_f
q_{no} 1 1 C q_f
$q_{0->ok}$ 0 0 C q_f
$q_{0->ok}$ 1 1 C q_f
$q_{1->ok}$ 0 1 C q_f
$q_{1->ok}$ 1 0 C q_f

2. Nelle seguenti terne, ogni elemento ha una caratteristica che gli altri due non hanno. Quale?
2a) Le funzioni RP, le funzioni RG, le funzioni RG totali
Le RP sono le uniche ottenibili senza minimalizzazione, le RG sono le uniche parziali, le RG totali sono I euniche non enumerabili.
2b) I programmi che terminano, le tavole delle MT deterministiche, l'insieme costituito dalle tre componenti RGB del colore più odiato dal vostro trisnonno più longevo
I programmi sono gli unici semidecidibili ma non decidibili, le tavole sono le uniche decidibili, le tre componenti RGB sono le uniche nemmeno semidecidibili in maniera costruttiva (oppure, costituiscono l'unico insieme finito).
2c) Il problema del commesso viaggiatore, la domanda "P$\subseteq$ NP?", lo stabilire l'MCD di due numeri dati x e y.
Il commesso viaggiatore è l'unico problema NP, "P$\subseteq$ NP?" è l'unico problema per cui non esiste ancora una soluzione, l'MCD è l'unico problema NON di decisione (la risposta è un numero e non sì/no), oppure è l'unico in P.

3. Dimostrare che sia la relazione di maggioranza (x>y), sia il modulo della differenza (|x-y|) sono in RP.
$x > y \equiv 1 - sgn(x \dot{-} y)$
$|x-y| \equiv (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$